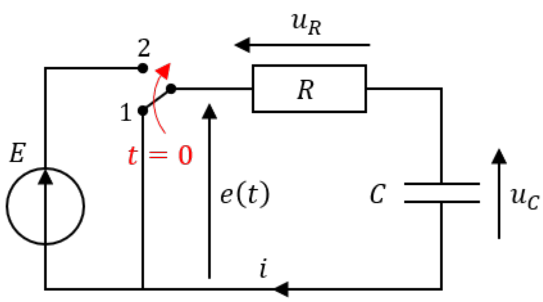
Chapitre E2 – Circuits du premier ordre

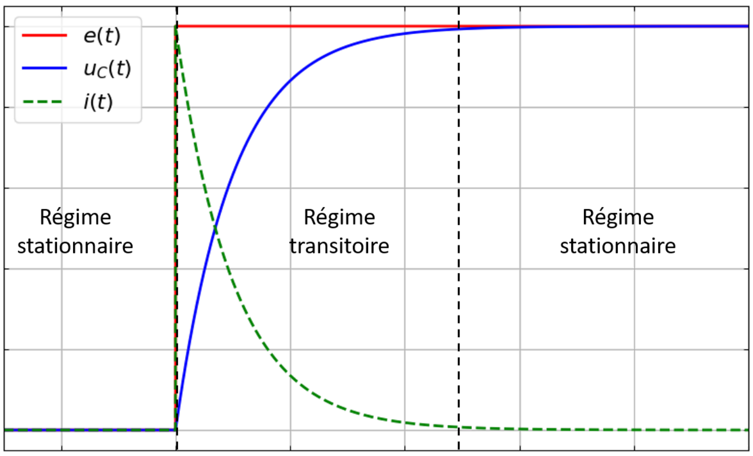
I) Circuit RC

1) Observations expérimentales

On considère le circuit suivant. L'interrupteur est en position 1 depuis un temps très long. En $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 2.



Observations expérimentales :

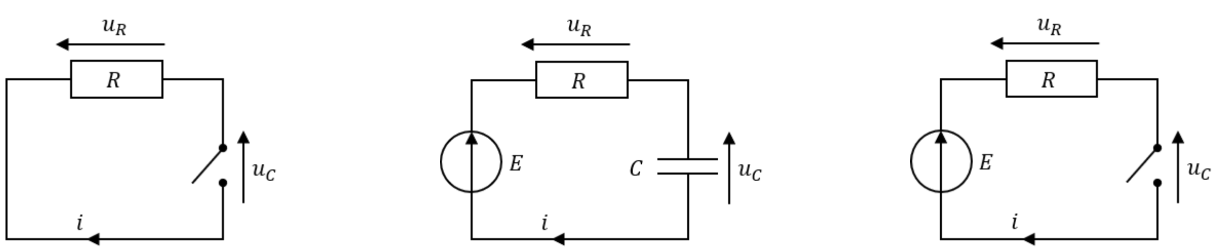


Le circuit RC est soumis à un **échelon** de tension ($0 \to E$).

Pour $t < 0$ et t très grand, le circuit est dans un régime stationnaire : toutes les grandeurs sont constantes. Après fermeture de l'interrupteur, on observe un **régime transitoire**.

On constate que $u_C(t)$ est continue (cf. chapitre E1) mais que $i(t)$ (ou $u_R(t)$) peut être discontinue.

2) Analyse des régimes stationnaires



$t = 0^-$ $\qquad$ $t = 0^+$ $\qquad$ $t = \infty$

Pour $t < 0$: régime stationnaire. On rappelle que le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

- Circuit ouvert : $i(0^-) = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad u_R(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_C \quad \Rightarrow \quad u_C(0^-) = 0$

Il est nécessaire de faire cette étape pour déterminer les expressions en $t = 0^+$.

- Continuité de u_C : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_C \quad \Rightarrow \quad u_R(0^+) = E$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad i(0^+) = \dfrac{E}{R}$

Remarque : seule u_C se doit d'être continue.

Pour $t \to \infty$: régime stationnaire.

- Circuit ouvert : $i(\infty) = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad u_R(\infty) = 0$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_C \quad \Rightarrow \quad u_C(\infty) = E$

3) Équation différentielle sur $u_C(t)$

Loi des mailles :

$$E = u_R + u_C = Ri + u_C = RC\,\frac{du_C}{dt} + u_C$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 1. Mettons l'ED sous sa forme canonique (cf. chapitre D2) :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

On identifie la **constante de temps** du circuit RC : $\boxed{\tau = RC}$

4) Résolution

La solution de cette ED est (cf. chapitre D2) :

$$u_C(t) = \underbrace{A\,e^{-t/\tau}}_{\text{SEH}} + \underbrace{E}_{\text{SP}}$$

On détermine la constante A à l'aide de la condition initiale en $t = 0^+$.

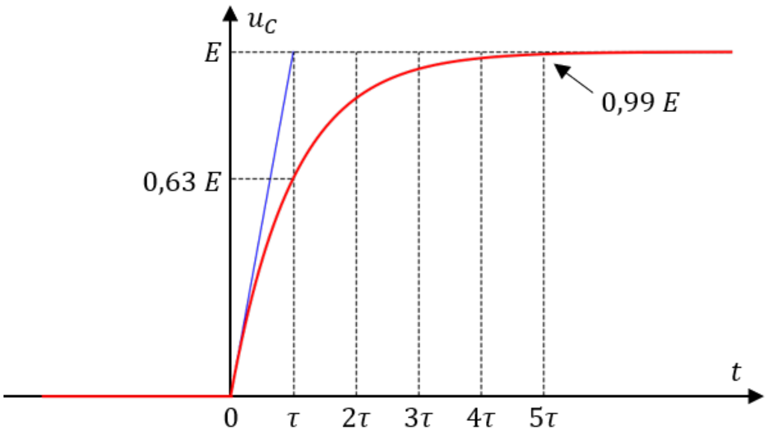
$$u_C(0^+) \underset{\text{I.2}}{\overset{}{=}} 0 \underset{\text{ED}}{=} A + E \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -E}$$

Bilan :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad \forall\ t > 0$$

5) Représentation graphique

Allure de la courbe :



Tangente en $t = 0^+$:

$$e^x \underset{\substack{\uparrow \\ x\to 0}}{\simeq} 1 + x \quad \Rightarrow \quad u_C \simeq E\left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right) = \frac{Et}{\tau}$$

<u>Propriété</u> : la tangente à l'origine intersecte la valeur finale en $t = \tau$.

Valeur de la fonction en $t = \tau$:

$$u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \simeq 0{,}63\ E$$

<u>Propriété</u> : en $t = \tau$, la fonction a atteint 63 % de la valeur de consigne.

Ordre de grandeur du régime transitoire t_{rt} ? On considère que le régime transitoire est terminé lorsque la fonction a atteint 99 % de la valeur de consigne.

$$u_C(t_{rt}) = E\left(1 - e^{-t_{rt}/\tau}\right) = 0{,}99\ E \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-t_{rt}/\tau} = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad e^{-t_{rt}/\tau} = 0{,}01$$

$$\Rightarrow \quad e^{t_{rt}/\tau} = 100 \quad \Rightarrow \quad t_{rt} = \underbrace{\ln(100)}_{\simeq\ 4{,}6} \times \tau \simeq 5\tau$$

<u>Propriété</u> : le régime transitoire dure environ 5τ.

6) Étude de $i(t)$

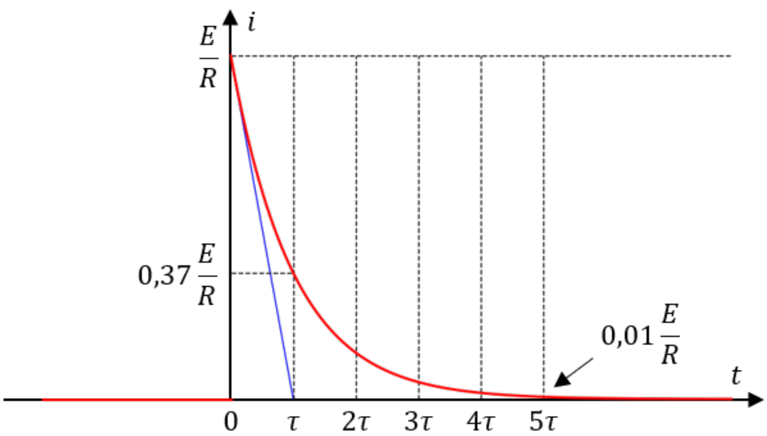
On pourrait refaire un travail similaire pour $i(t)$: loi des mailles, ED sur $i(t)$, résolution.

Mais puisque l'on connaît déjà $u_C(t)$, alors on a immédiatement :

$$i = C\frac{du_C}{dt} \quad \text{avec :} \quad u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Ainsi,

$$i(t) = \frac{CE}{\tau}\ e^{-t/\tau} \quad \text{avec :} \quad \tau = RC \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\ e^{-t/\tau}}$$



7) Bilan énergétique

Méthode :

- Loi des mailles
- Multiplier par $i \rightarrow$ bilan de puissance
- Intégrer par rapport au temps $\rightarrow$ bilan d'énergie

Loi des mailles

$$E = Ri + u_C \quad \Rightarrow \quad Ei = Ri^2 + u_C i$$

On rappelle que :

$$i = C\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_C i = Cu_C\frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

On en déduit le bilan de puissance :

$$\underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_g} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}_{\mathcal{P}_{el}}$$

On rappelle que :

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int d\mathcal{E} = \int \mathcal{P}dt \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \int \mathcal{P}dt$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{el} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_g = \mathcal{E}_J + \mathcal{E}_{el}$$

Calculons les énergies associées à chaque dipôle.

Énergie fournie par le générateur :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^\infty \mathcal{P}_g dt = E\int_0^\infty C\frac{du_C}{dt}dt = EC\int_0^\infty du_C = EC\Big[u_C\Big]_0^\infty = EC\,(E-0) = CE^2$$

Énergie reçue par le condensateur :

$$\mathcal{E}_{el} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)dt = \int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = \left[\frac{1}{2}Cu_C^2\right]_0^\infty = \frac{1}{2}C\left(E^2-0^2\right) = \frac{1}{2}CE^2$$

Énergie reçue par la résistance (dissipée par effet Joule) :

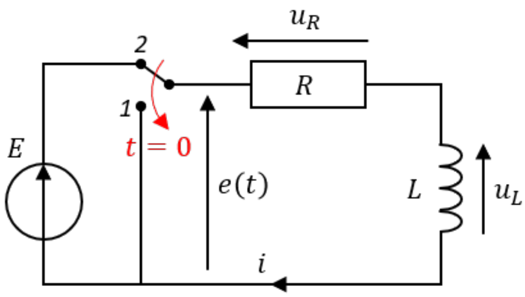
$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = R\int_0^\infty \left(\frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}\right)^2 dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = -\frac{CE^2}{2}\,(0-1) = \frac{1}{2}CE^2$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur, l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans la résistance.

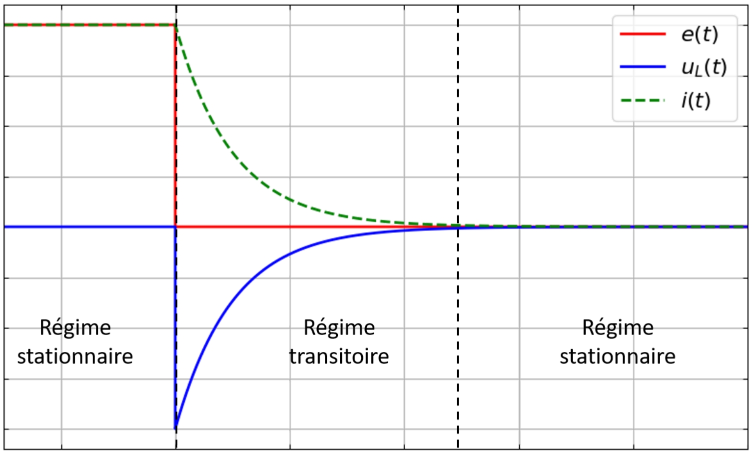
II) Circuit RL

1) Observations expérimentales

On considère le circuit suivant. L'interrupteur est en position 2 depuis un temps très long. En $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 1.



Observations expérimentales :

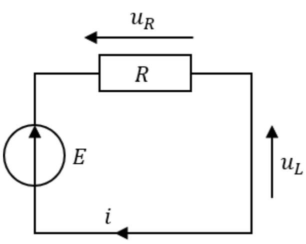


Le circuit RL est soumis à un **échelon** de tension $(0 \to E)$.

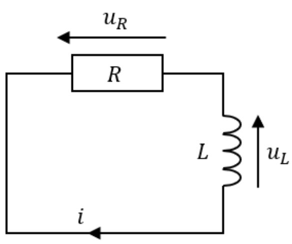
Pour $t < 0$ et t très grand, le circuit est dans un régime stationnaire : toutes les grandeurs sont constantes. Après fermeture de l'interrupteur, on observe un **régime transitoire**.

On constate que $i(t)$ est continue (cf. chapitre E2) mais que $u_L(t)$ peut être discontinue.

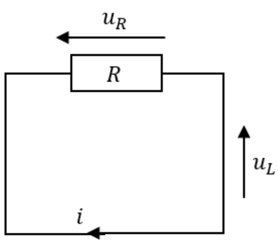
2) Analyse des régimes stationnaires



$t = 0^-$



$t = 0^+$



$t = \infty$

Pour $t < 0$: régime stationnaire. On rappelle que la bobine se comporte comme un fil.

- Tension aux bornes d'un fil : $u_L(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_L \quad \Rightarrow \quad u_R(0^-) = E$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad i(0^-) = \dfrac{E}{R}$

Il est nécessaire de faire cette étape pour déterminer les expressions en $t = 0^+$.

- Continuité de i : $i(0^+) = i(0^-) = \dfrac{E}{R}$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad u_R(0^+) = E$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_L \quad \Rightarrow \quad u_L(0^+) = -E$

Remarque : seule i se doit d'être continue.

Pour $t \to \infty$: régime stationnaire.

- Tension aux bornes d'un fil : $u_L(\infty) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_L \quad \Rightarrow \quad u_R(\infty) = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad i(\infty) = 0$

3) Équation différentielle sur $i(t)$

Loi des mailles :

$$0 = u_R + u_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 1. Mettons l'ED sous sa forme canonique (cf. chapitre D2) :

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = 0$$

On identifie la **constante de temps** du circuit RL : $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$

4) Résolution

La solution de cette ED est (cf. chapitre D2) :

$$i(t) = \underbrace{A\ e^{-t/\tau}}_{\text{SEH}} + \underbrace{0}_{\text{SP}}$$

On détermine la constante A à l'aide de la condition initiale en $t = 0^+$.

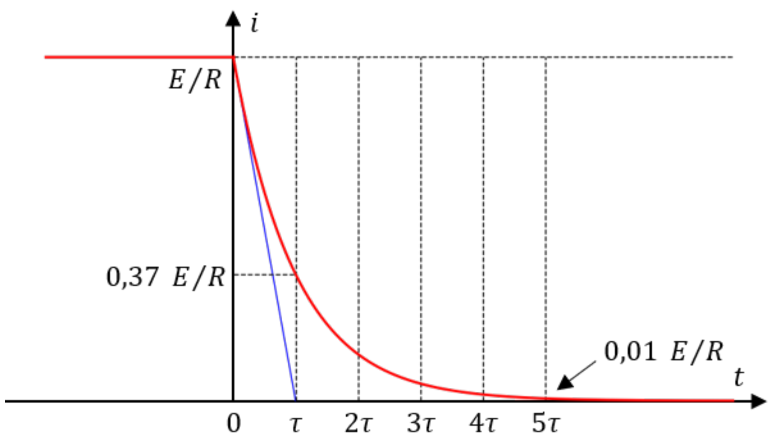
$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{II.2}}}{=} \frac{E}{R} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ED}}}{=} A$$

Bilan :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\ e^{-t/\tau}} \quad \forall\ t > 0$$

5) Représentation graphique

Allure de la courbe :



6) Étude de $u_L(t)$

On a :

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{LE}{R\tau}\ e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_L(t) = -E\ e^{-t/\tau}}$$

7) Bilan énergétique

Loi des mailles

$$0 = Ri + u_L \quad \Rightarrow \quad 0 = Ri^2 + u_L i$$

On rappelle que :

$$u_L = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_L i = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

On en déduit le bilan de puissance :

$$0 = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}_{\mathcal{P}_{mag}}$$

Ainsi,

$$0 = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{mag} \quad \Rightarrow \quad 0 = \mathcal{E}_J + \mathcal{E}_{mag}$$

Calculons les énergies associées à chaque dipôle.

Énergie reçue par la bobine :

$$\mathcal{E}_{mag} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)dt = \int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^\infty = \frac{1}{2}L\left(0^2 - \left(\frac{E}{R}\right)^2\right) = -\frac{LE^2}{2R^2} < 0$$

Énergie reçue par la résistance (dissipée par effet Joule) :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = R\int_0^\infty \left(\frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}\right)^2 dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = -\frac{LE^2}{2R^2}(0-1) = \frac{LE^2}{2R^2}$$

Toute l'énergie initialement stockée dans la bobine $\left(\frac{1}{2}Li^2(0^+)\right)$ est perdue. Cette énergie est dissipée par effet Joule dans la résistance.

III) Résolution numérique d'une ED du premier ordre

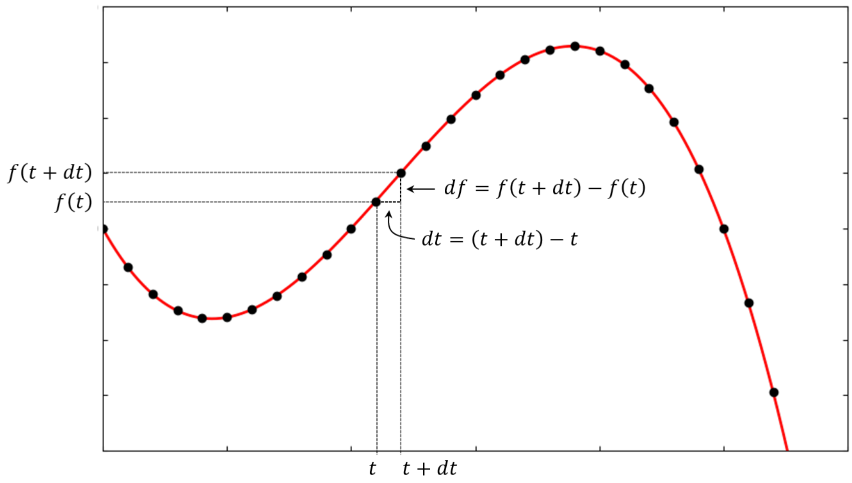
Objectif : résoudre numériquement une ED du premier ordre à l'aide de la méthode d'Euler.

Prenons le cas général :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = \frac{g(t)}{\tau} \quad \text{avec :} \quad f\left(0^+\right) = f_0$$

et où $g(t)$ est une fonction connue.

Signification de la notation $\dfrac{df}{dt}$



Par définition, la dérivée est la limite du taux d'accroissement :

$$f'(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

C'est pour cela qu'en physique on note la dérivée :

$$\frac{df}{dt} \equiv f'(t)$$

La méthode d'Euler consiste à faire l'approximation suivante :

$$f'(t) \underset{dt \ll \tau}{\simeq} \frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}$$

où τ représente le temps caractéristique de variation de f.

<u>Méthode</u> :

- Remplacer $\dfrac{df}{dt}$ par $\dfrac{f(t+dt)-f(t)}{dt}$
- Isoler $f(t+dt)$
- Discrétiser la relation obtenue

<u>Application</u> :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = \frac{g(t)}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(t+dt)-f(t)}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = \frac{g(t)}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(t+dt) = f(t) + \Big(g(t) - f(t)\Big)\frac{dt}{\tau}}$$

On va stocker les valeurs de t et f dans des listes. On définit le $n+1$ ème terme de chaque liste en fonction du n ème terme.

$$\begin{cases} t[n+1] = t[n] + dt & \text{avec : } t[0] = 0 \\ f[n+1] = f[n] + \Big(g[n] - f[n]\Big)\dfrac{dt}{\tau} & \text{avec : } f[0] = f_0 \end{cases}$$

<u>Exemple</u> de code Python pour le circuit RC (cf. I.3) :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec : } \quad \tau = RC \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C[n+1] = u_C[n] + \Big(E - u_C[n]\Big)\frac{dt}{\tau} \quad \text{avec : } \quad dt \ll \tau}$$

```python
E = 5
R = 1e3
C = 1e-6
tau = R*C

dt = tau/100
t_max = 7*tau
t = [0]
u = [0]

while t[-1] < t_max:
    t.append(t[-1] + dt)
    u.append(u[-1] + (E-u[-1])*dt/tau)

# Graphe de u(t)
import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, u, 'r-')
```